☜ الموضوع الأول

☜ التمرين الأول: (04 نقاط)

N عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{abcca}^5$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويكتب $\overline{bbab}^8$ في نظام التعداد ذي الأساس 8.

1) بين أنَ N يحقق : $309a+15c=226b$.

2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد b.

3) فيما يلي نفرض أنَ : $b=3$.

أ) بين أن، $309(a-2)=60-15c$.

ب) استنتج أن العدد 5 قاسم للعدد $(a-2)$ ثم استنتج كلا من a و c .

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 10.

☜ التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و I التي لواحقها على الترتيب ، $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq-2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد z' .

-1 أ) تحقق من أن : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيلا صرفا.

-2 أ) تحقق من أنَ : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$.

ب) استنتج أنَ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ وان $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنَه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ)ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

-3 لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) بين أن النقطة E تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E.

☜ التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$.

ج) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

☜ التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{-x})-x$.

4) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) أرسم (Δ) و (C_g).

6) استنتج اشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجموعة $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

1) برهن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

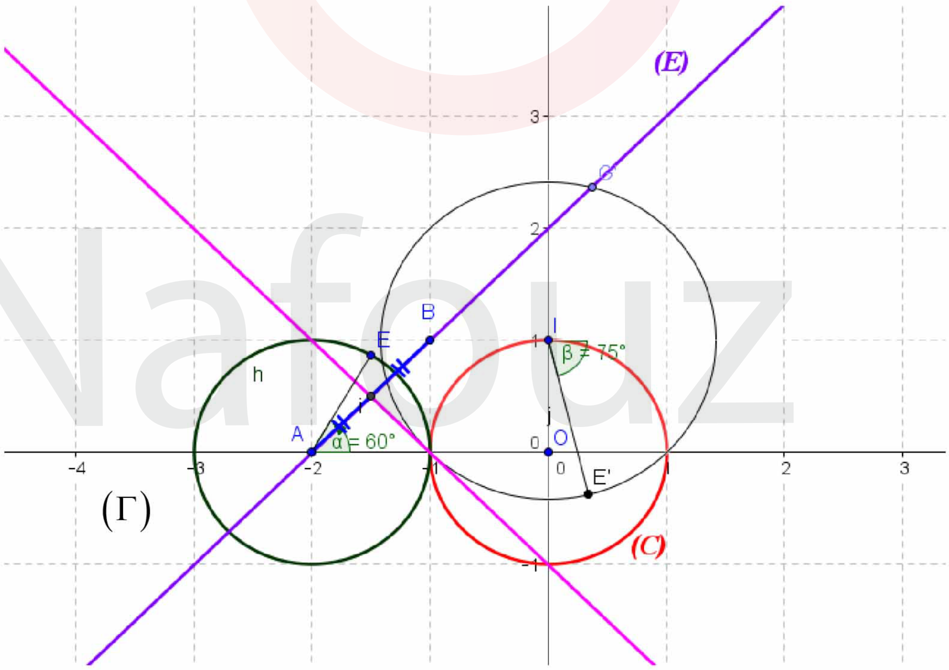
2) بيَن أنَه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثمَ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنَه من أجل كل عدد حقيقي x $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ثم أحسب : $\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$.

4) أحسب $\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,dx$

04	التمرين الأول
01	لدينا : $N=\overline{abcca}^{5}$ و $N=\overline{bbab}^{8}$ 1) تبيان أنَ N يحقق : $309a+15c=226b$ • لدينا : $N=a\times5^4+b\times5^3+c\times5^2+c\times5+a\times5^0=625a+125b+25c+5c+a$ أي $N=626a+125b+30c$ • ولدينا : $N=b\times8^3+b\times8^2+a\times8+b\times8^0=512b+64b+8a+b$ أي $N=577b+8a$ • إذن : $626a+125b+30c=577b+8a$ اي $618a+30c=452b$ ومنه $309a+15c=226b$
0.25	2) تبيان أن العدد 3 قاسم للعدد b: • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ - لدينا : $3/226b$ و $3\wedge226=1$ ومنه $3/b$ حسب مبرهنة غوص .
0.75	3) نفرض $b=3$. أ) تبيان أن : $309(a-2)=60-15c$ • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ ومنه $309a+15c=678$ • ولدينا : $309a-618=60-15c$ ومنه $309(a-2)=60-15c$
2×0.75	ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a-2$: • لدينا : $309(a-2)=5(12-3c)$ $5/309(a-2)$ و $5\wedge309=1$ ومنه $5/(a-2)$ حسب مبرهنة غوص . • استنتاج قيمة a : بما أن $5/(a-2)$ فان : $a-2=5k(k\in\mathbb{N})$ ولدينا : $a<5$ أي أنَ : $a=2$. • استنتاج قيمة العدد c: لدينا : $309\times2+15c=678$ ومنه $15c=678-618$ أي $c=4$
0.5	ج) كتابة العدد N في نظام التعداد 10: $N=577(3)+8(2)=1747$
04نقاط	التمرين الثاني ✍
0.25	• لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$ من أجل $z\neq-2$ **-1 أ) التحقق من أنَ :** $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ • لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}=\dfrac{i\left(z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}{z+2}=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$

0.5	ب) تبيان أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان M' تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$: • لدينا : M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM = BM$ • ولدينا : $\lvert z'\rvert = \left\lvert \frac{i(z+1-i)}{z+2} \right\rvert = \frac{\lvert i\rvert \times \lvert z+1-i\rvert}{\lvert z+2\rvert}$ أي $OM' = \frac{BM}{AM} = 1$ • إذن $OM' = 1$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $R=1$
0.5	ج) تعيين طبيعة المجموعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا : • z' تخيلي صرف معناه $Arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ • ومنه $Arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $Arg(i) + Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi$ معناه : $\frac{\pi}{2} + Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = k\pi$ أي $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = k\pi$ • المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B. $(E) = (AB) - \{A,B\}$
0.25	2- أ) التحقق من أنَ : $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$ • لدينا : $z'-i = \frac{iz+i+1}{z+2} - i = \frac{iz+i+1-iz-2i}{z+2} = \frac{1-i}{z+2}$ أي $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$
0.25	ب) استنتاج أنَ : $IM' \times AM = \sqrt{2}$: • لدينا : $z'-i = \frac{1-i}{z+2}$ ومنه $\lvert z'-i\rvert = \left\lvert \frac{1-i}{z+2} \right\rvert$ أي $\lvert z'-i\rvert = \frac{\lvert 1-i\rvert}{\lvert z+2\rvert}$ وبالتالي : $IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM'\times AM = \sqrt{2}$
0.5	• استنتاج أنَ : $(\vec{u},\overrightarrow{IM'}) + (\vec{u},\overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ لدينا : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ ومنه $Arg(z'-i) = Arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)$ أي $Arg(z'-i) = Arg(1-i) - Arg(z+2)$ ومنه $Arg(z'-i)+Arg(z+2) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ اي $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$
0.5	ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها : • لدينا : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM=1$ • ولدينا : $IM'\times AM = \sqrt{2}$ أي $IM'=\sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$

0.25	**-3** لدينا : $z_E=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **أ) تبيان أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ):** • **لدينا :** $AE=\|z_E-z_A\|=\left\|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ ومنه $E\in(\Gamma)$
0.5	• **تبيان أن :** $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ **:** لدينا : $z_{\overrightarrow{AE}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)=arg\left(z_{\overrightarrow{AE}}\right)=Arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
0.5	**ب) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E:** **لدينا :** $EE'=\sqrt{2}$ ولدينا : $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ومنه $\left(\vec{u},\overrightarrow{IE'}\right)=-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$ 
05نقاط	**التمرين الثالث**
0.25	• لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$ **-1 التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي** n، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

	- لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$
0.75	**2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$** نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . 1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$ اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$. 2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ : $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$. - لدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$ وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_n+1}<-\frac{1}{2}$ وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة . 3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .
0.25 0.5	**ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$** • لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$. • **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :** ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ - لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$ وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$ - ولدينا : $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ - أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.
0.5	**ج) دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$. • **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ **أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :** • لدينا : $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$ أي $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$ ومنه $v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$ وحدها الأول $v_0=\frac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$	0.75
ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n : • لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{1}{3}\times6^n$	0.5
• **استنتاج أنَ :** $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ - لدينا : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$ - ومنه $(2v_n-3^n)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\frac{v_n}{2v_n-3^n}$ إذن : $u_n=\frac{-\frac{1}{3}\times6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times6^n\right)-3^n}=-\frac{6^n}{-2\times6^n-3\times3^n}$ ومنه أي $u_n==-\frac{6^n}{-2\times6^n-3\times3^n}=\frac{2^n\times3^n}{2\times3^n\times2^n+3\times3^n}$ $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$	0.75
• حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$	0.5
التمرين الرابع	**07 نقاط**
I. لدينا : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-ln(e^x+1)$ **1) حساب النهايات :** • **حساب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$:**	

<table>
<tr>
<td>0.25

0.25</td>
<td>$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)\right)=0$ لأنّ $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0\\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=0\end{cases}$
- التفسير الهندسي : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_g) بجوار $-\infty$</td>
</tr>
<tr>
<td>0.25</td>
<td>• حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:
$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)\right)=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\\ \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)=+\infty\end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>0.5</td>
<td>2) تبيان أنّ $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$
• لدينا : $g'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\times e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{(e^x+1)^2}$
أي $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>0.25</td>
<td>• استنتاج اتجاه تغير الدالة g :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$-e^{2x}$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td>$-$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>0.5</td>
<td>• جدول التغيرات :
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>0 ↘ $-\infty$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>0.5</td>
<td>3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}+\ln(1+e^{-x})-x$
• لدينا : $g(x)=\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}-\ln\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه :
$g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-\ln(e^x)-\ln(1+e^{-x})$ أي $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}+\ln(1+e^{-x})-x$</td>
</tr>
</table>

4) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$:

0.5

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$

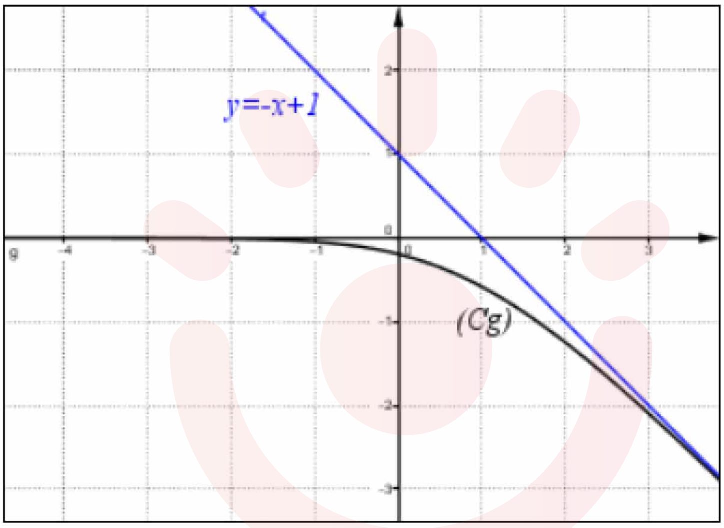
ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لانَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$

0.25

- **تفسير النتيجة :** المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_g\right)$ عند $-\infty$.

5) الرسم :

0.75



6) استنتاج اشارة $g(x)$ **:**

0.25

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

II. لدينا : $f(x)=e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)$

1) البرهان أنَ : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

0.25

- نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانَ : $t\to0$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{ln(t+1)}{t}=1$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

0.25

- **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=0$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ **:**

0.5

- لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times ln\left(e^{x}+1\right)+e^{-x}\times\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}-ln\left(e^{x}+1\right)\right)$

أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$+\infty$ $-\infty$
$g(x)$	$-$
$f'(x)$	$-$

0.25

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$+\infty$ $-\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

0.5

3) **التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$**

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

0.25

- حساب $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$:

$$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-ln3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-ln3}^{0}=-ln2+ln\left(1+e^{ln3}\right)$$

أي $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=-ln2+ln4=-ln2+2ln2=ln2$

0.5

4) **حساب $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx$: بالمكاملة بالتجزئة**

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx$$

نضع : $u'(x)=e^{-x}$ ومنه $u(x)=-e^{-x}$

و $v(x)=ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

إذن :

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}ln\left(e^x+1\right)\right]_{-ln3}^{0}-\int_{-ln3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

أي $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+e^{ln3}ln\left(e^{-ln3}+1\right)+\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$

$\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+3ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+ln2=3ln\frac{4}{3}$ إذن $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=3ln\frac{4}{3}$

0.5